

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ФІЗИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ, ЯКА ОПИСУЄТЬСЯ ОДНИМ ВИДОМ ФУНКЦІЇ В ПРОСТОРАХ РІЗНОЇ ВИМІРНОСТІ

У статті розглянута одного виду функція розповсюдженої величини в просторах різної вимірності на додатних декартових областях інтегрування. Кількісні значення величини та координат її центра визначаються невідними інтегралами першого роду. Наведено умови, за яких такі кількісні значення є визначеними чи невизначеними.

There has been considered a function of a widespread value in spaces of different dimensions on Cartesian positive areas of integration. Quantitative magnitudes of the value and of coordinates of its center are determined by improper integrals of the first kind. There have been given conditions under which such quantitative magnitudes are defined or undefined.

Ключові слова: фізична величина, функція величини.

В курсі механіки [1] координати центра (точка C) довільної величини, що описується функцією $m(x, y, z)$, визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_x}{M}, \quad y_c = \frac{M_y}{M}, \quad z_c = \frac{M_z}{M}, \quad (1)$$

де знаменник M є інтегральним значенням самої величини, а чисельники дробів є відповідними статичними моментами величини відносно осей координат.

Застосуємо ці формули в R^1, R^2, R^3 просторах для розповсюдженої величини, що описується функцією

$$m = A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} \cdot z^{-k_3}, \quad (2)$$

при сталих $\{A, a, b, c\} > 0$, $a \in 0x$, $b \in 0y$, $c \in 0z$; $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, та змінних $x \in [a, \infty)$, $y \in [b, \infty)$, $z \in [c, \infty)$.

Тут при $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ величина $m = A = \text{const}$ не є розповсюдженою, а зосередженою в точці з координатами її ж центра у відповідному просторі.

І. В R^1 розповсюджена величина (наприклад, при $k_2 = k_3 = 0$) за законом $m = A \cdot x^{-k_1}$ розглянута в [2]. Отже, за $k_2 = k_3 = 0$ і різних значень k_1 за умови $\alpha > a$ маємо:

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } 0 < k_1 < 1 \quad M &= \int_a^\infty A \cdot x^{-k_1} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{A}{1 - k_1} x^{1-k_1} \Big|_a^\alpha = \infty; \\ 2) \text{ при } k_1 = 1 \quad M &= \int_a^\infty \frac{A}{x} \cdot dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} A \cdot \ln x \Big|_a^\alpha = \infty; \\ 3) \text{ при } k_1 > 1 \quad M &= \int_a^\infty A \cdot x^{-k_1} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{A}{1 - k_1} \cdot x^{1-k_1} \Big|_a^\alpha = \frac{A}{k_1 - 1} a^{1-k_1} = \text{const}. \end{aligned}$$

Для кількісно визначеної величини $M = \text{const}$ при $k_1 > 1$ знаходимо координату x_c залежно від значення k_1 :

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } 1 < k_1 < 2 \quad x_c &= \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \int_a^\infty x \cdot A \cdot x^{-k_1} dx = \frac{A}{M(2 - k_1)} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} x^{2-k_1} \Big|_a^\alpha = \infty; \\ 2) \text{ при } k_1 = 2 \quad x_c &= \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \int_a^\infty x \cdot A \cdot x^{-2} dx = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^\alpha = \infty; \\ 3) \text{ при } k_1 > 2 \end{aligned}$$

$$x_c = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M} \int_a^\infty x \cdot A \cdot x^{-k_1} dx = \frac{A(k_1 - 1)}{A(k_1 - 2)} a^{k_1 - 1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} x^{2-k_1} \Big|_a^\alpha = \frac{k_1 - 1}{k_1 - 2} \cdot a. \quad (3)$$

Отже, при $1 < k_1 \leq 2$ і $k_2 = k_3 = 0$ для визначеної за кількістю величини (2) координата її центра в R^1 невизначена $x_c = \infty$, а при $k_1 > 2$ – визначена.

Аналогічні результати отримаємо і для інших випадків R^1 : коли $k_1 = k_3 = 0$, $1 < k_2 \leq 2$ та коли

$$k_1 = k_2 = 0, \quad 1 < k_3 \leq 2.$$

II. В просторі R^2 розповсюджена величина (2) (наприклад, при $k_3 = 0$ та $\{k_1, k_2\} \neq 0$) описується функцією $m = A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2}$. За різних значень $\{k_1, k_2\}$ маємо

$$M = \int_a^\infty \int_b^\infty A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} dx dy = A \int_a^\infty x^{-k_1} dx \cdot \int_b^\infty y^{-k_2} dy,$$

і за умови $\alpha > a$ та $\beta > b$ знаходимо:

- 1) при $\{0\} < \{k_1, k_2\} < \{1\}$ $M = A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta = \infty$;
- 2) при $\{k_1, k_2\} = \{1\}$ $M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln y \Big|_b^\beta = \infty$;
- 3) при $\{k_1, k_2\} > \{1\}$ $M = A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta = \frac{A \cdot a^{1-k_1} \cdot b^{1-k_2}}{(k_1-1)(k_2-1)} = const$;
- 4) при $0 < k_1 < 1, k_2 = 1$ $M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln y \Big|_b^\beta = \infty$;
- 5) при $0 < k_1 < 1, k_2 > 1$ $M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta = \infty$;
- 6) при $k_1 \geq 1, 0 < k_2 < 1$, очевидно, отримаємо результати, аналогічні отриманим в п. 4, 5.

Для кількісно визначеної величини M , що можливо тільки при $\{k_1, k_2\} > \{1\}$, знайдемо координати її центра за формулами (1):

$$x_c = \frac{1}{M} \int_a^\infty \int_b^\infty x \cdot A \cdot x^{-k_1} y^{-k_2} dx dy = \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^\alpha x^{1-k_1} dx \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_b^\beta y^{-k_2} dy = \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^\alpha x^{1-k_1} dx \cdot \frac{b^{1-k_2}}{k_2-1}.$$

Звідси:

- 1) при $1 < k_1 < 2$ $x_c = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{2-k_1}}{2-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{k_2-1} = \infty$;
- 2) при $k_1 = 2$ $x_c = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{k_2-1} = \infty$;
- 3) при $k_1 > 2$ $x_c = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{2-k_1}}{2-k_1} \cdot \frac{b^{1-k_2}}{k_2-1} = \left| M = \frac{A \cdot a^{1-k_1}}{(k_1-1)(k_2-1)} \right| = \frac{k_1-1}{k_1-2} \cdot a$,

$$y_c = \frac{1}{M} \int_a^\infty \int_b^\infty y \cdot A \cdot x^{-k_1} y^{-k_2} dx dy = \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^\alpha x^{-k_1} dx \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_b^\beta y^{1-k_2} dy = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_b^\beta y^{1-k_2} dy.$$

Звідси:

- 1) при $1 < k_2 < 2$ $y_c = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{2-k_2}}{2-k_2} \Big|_b^\beta = \infty$;
- 2) при $k_2 = 2$ $y_c = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln y \Big|_b^\beta = \infty$;
- 3) при $k_2 > 2$ $y_c = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{2-k_2}}{2-k_2} \Big|_b^\beta = \left| M = \frac{A \cdot a^{1-k_1}}{(k_1-1)(k_2-1)} \right| = \frac{k_2-1}{k_2-2} \cdot b$.

Отже, при $\{1\} < \{k_1, k_2\} \leq \{2\}$ і $k_3 = 0$ для визначеної за кількістю величини (2) координати її центра в R^2 невизначені ($x_c = \infty, y_c = \infty$). При $k_1 > 2, 1 < k_2 \leq 2, k_3 = 0$ координата x_c визначена, а інша $y_c = \infty$. При $k_2 > 2, 1 < k_1 \leq 2, k_3 = 0$ координата y_c визначена, а інша x_c невизначена. І тільки за умови $\{k_1, k_2\} > \{2\}, k_3 = 0$ маємо функцію (2) розповсюджену фізичної величини з визначеними координатами її центра:

$$x_c = \frac{k_1 - 1}{k_1 - 2} \cdot a, \quad y_c = \frac{k_2 - 1}{k_2 - 2} \cdot b, \quad k_1 > 2, k_2 > 2. \quad (4)$$

Аналогічні результати отримаємо і для інших випадків R^2 : при $k_1 = 0$ $\{1\} < \{k_2, k_3\} \leq \{2\}$ та при $k_2 = 0$ $\{1\} < \{k_1, k_3\} \leq \{2\}$.

III. В просторі R^3 розповсюджена величина (2) описується при $\{k_1, k_2, k_3\} \neq \{0\}$. Тоді значення

$$M = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} \cdot z^{-k_3} dx dy dz = A \int_a^\infty x^{-k_1} dx \cdot \int_b^\infty y^{-k_2} dy \cdot \int_c^\infty z^{-k_3} dz$$

за умови $\alpha > a, \beta > b, \gamma > c$ отримаємо такими:

$$1) \text{ при } \{0\} < \{k_1, k_2, k_3\} < \{1\} \quad M = A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{1-k_3}}{1-k_3} \Big|_c^\gamma = \infty;$$

$$2) \text{ при } \{k_1, k_2, k_3\} = \{1\} \quad M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln y \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \ln z \Big|_c^\gamma = \infty;$$

$$3) \text{ при } \{k_1, k_2, k_3\} > \{1\}$$

$$M = A \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{1-k_3}}{1-k_3} \Big|_c^\gamma = \frac{A \cdot a^{1-k_1} \cdot b^{1-k_2} \cdot c^{1-k_3}}{(k_1-1)(k_2-1)(k_3-1)} = const;$$

$$4) \text{ при } \{0\} < \{k_1, k_2\} < \{1\}, k_3 = 1 \quad M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \ln z \Big|_c^\gamma = \infty;$$

$$5) \text{ при } \{0\} < \{k_1, k_2\} < \{1\}, k_3 > 1 \quad M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{1-k_3}}{1-k_3} \Big|_c^\gamma = \infty;$$

$$6) \text{ при } 0 < k_1 < 1, k_2 = k_3 = 1 \quad M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln y \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \ln z \Big|_c^\gamma = \infty;$$

$$7) 0 < k_1 < 1, k_2 > 1, k_3 > 1 \quad M = A \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k_1}}{1-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{1-k_3}}{1-k_3} \Big|_c^\gamma = \infty;$$

8) очевидно, що інші варіанти значень k_i приводять до обчислень, аналогічних наведеним в п. 4 – п. 7, для яких також отримаємо $M = \infty$ (наприклад, для випадку $\{0\} < \{k_1, k_3\} < \{1\}, k_2 = 1$ та ін.).

Для кількісно визначеної величини M , що можливо тільки при $\{k_1, k_2, k_3\} > \{1\}$, знайдемо координати її центра за формулами (1):

$$x_c = \frac{1}{M} \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty x \cdot A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} \cdot z^{-k_3} dx dy dz =$$

$$= \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^\alpha x^{1-k_1} dx \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{1-k_2}}{1-k_2} \Big|_b^\beta \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{1-k_3}}{1-k_3} \Big|_c^\gamma = \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{2-k_1}}{2-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{k_2-1} \cdot \frac{c^{1-k_3}}{k_3-1}.$$

Звідси:

$$1) \text{ при } 1 < k_1 < 2 \quad x_c = \frac{A}{M} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{2-k_1}}{2-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{(k_2-1)(k_3-1)} = \infty;$$

$$2) \text{ при } k_1 = 2 \quad x_c = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{(k_2-1)(k_3-1)} = \infty;$$

$$3) \text{ при } k_1 > 2 \quad x_c = \frac{A}{M} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{x^{2-k_1}}{2-k_1} \Big|_a^\alpha \cdot \frac{b^{1-k_2}}{(k_2-1)(k_3-1)} = \left| M = \frac{A \cdot a^{1-k_1}}{(k_1-1)(k_2-1)(k_3-1)} \right| = \frac{k_1-1}{k_1-2} \cdot a.$$

За аналогічних досліджень отримаємо значення для y_c і z_c :

$$y_c = \frac{1}{M} \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty y \cdot A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} \cdot z^{-k_3} dx dy dz = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \frac{c^{1-k_3}}{k_3-1} \cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{y^{2-k_2}}{2-k_2} \Big|_b^\beta.$$

Звідси при $1 < k_2 \leq 2$ $y_c = \infty$; при $k_2 > 2$ $y_c = \frac{k_2-1}{k_2-2} \cdot b$,

$$z_c = \frac{1}{M} \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty z \cdot A \cdot x^{-k_1} \cdot y^{-k_2} \cdot z^{-k_3} dx dy dz = \frac{A}{M} \cdot \frac{a^{1-k_1}}{k_1-1} \frac{c^{1-k_2}}{k_2-1} \cdot \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{z^{2-k_3}}{2-k_3} \Big|_b^\gamma.$$

Звідси при $1 < k_3 \leq 2$ $z_c = \infty$; при $k_3 > 2$ $z_c = \frac{k_3-1}{k_3-2} \cdot c$.

Отже, при $\{1\} < \{k_1, k_2, k_3\} \leq \{2\}$ для визначеної M величини (2) усі координати її центра невизначені, а при $\{k_1, k_2, k_3\} > \{2\}$ усі координати центра визначені:

$$x_c = \frac{k_1-1}{k_1-2} \cdot a, \quad y_c = \frac{k_2-1}{k_2-2} \cdot b, \quad z_c = \frac{k_3-1}{k_3-2} \cdot c, \quad k_1 > 2, k_2 > 2, k_3 > 2. \quad (5)$$

В інших випадках значень k_i для визначеної величини M отримаємо визначеними тільки ті координати, для яких відповідні $k_i > 2$, а інші залишаються невизначеними. Наприклад, якщо $k_2 > 2, k_3 > 2, 1 < k_1 \leq 2$, то в R^3 отримаємо невизначеною $x_c = \infty$, та визначеними y_c і z_c за формулами в (5).

Проведені дослідження показують, що для розповсюдженної величини, яка описується функцією (2), її інтегральне значення M визначене за умови, коли усі $k_i > 1$ відповідних координат простору, а інші дорівнюють нулю. Для визначених M координати центра можуть бути як визначеними, так і невизначеними. Визначеними є тільки ті координати, для яких в показниках степенів (2) відповідних змінних маємо $k_i > 2$, а інші координати залишаються невизначеними.

Список використаних джерел

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Никитин Н.Н. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Лесюк І.І. Про маси з невизначеними координатами центрів / І.І. Лесюк, Л.О. Лисова // Нові інформаційні технології в вирішенні проблем виробництва, екології, освіти, управління та права : зб. наук. праць. – Хмельницький : ТУП, 2003. – С. 145 – 147.